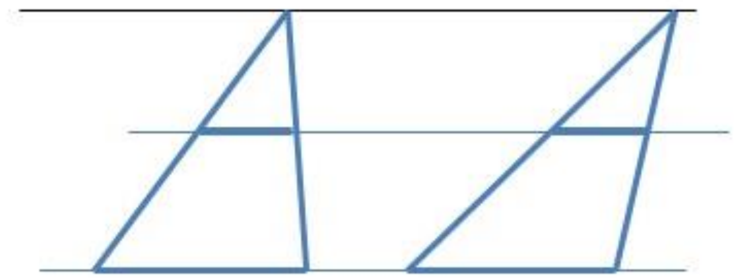
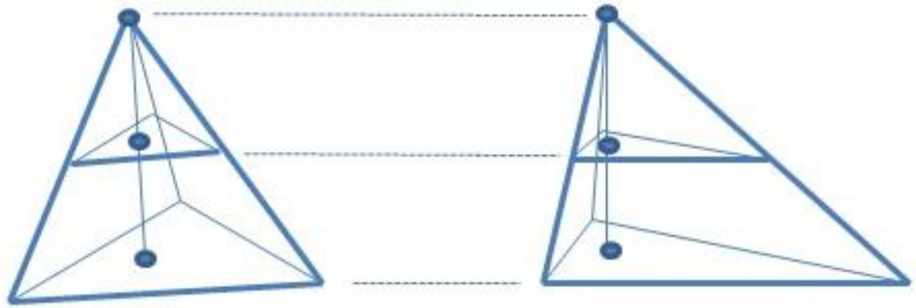
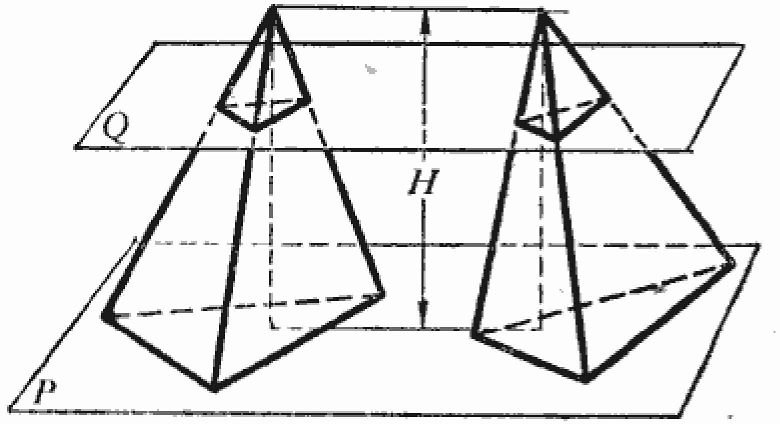
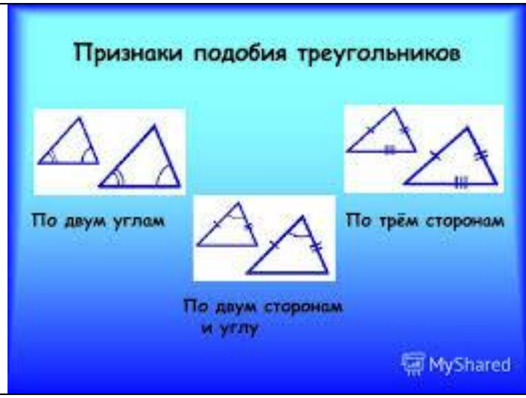
Методика работы с доказательством принципа Кавальери и объёмом пирамиды.

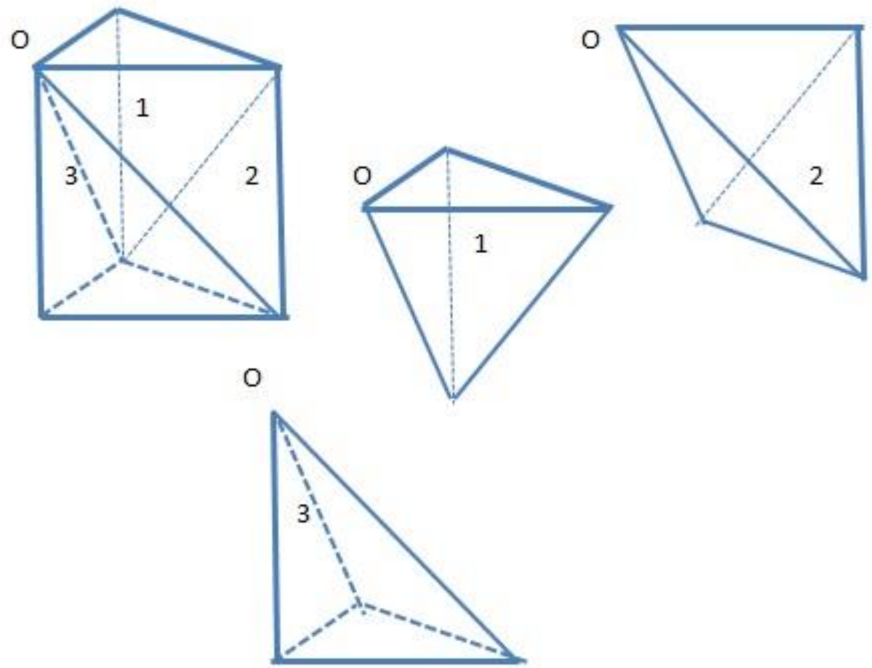
Учитель	Ученик	Доска
Предлагаю вспомнить площадь треугольника, подобие треугольников и следствия из подобия, чтобы доказать принцип Ковальери. **Принцип Кавальери** —Если любая плоскость, параллельная данной, пересекает два тела по фигурам равной площади, то объемы этих тел равны.	Записывают формулировку теоремы в тетрадь.	**Принцип Кавальери** —Если любая плоскость, параллельная данной, пересекает два тела по фигурам равной площади, то объемы этих тел равны.
Рассмотрим равные по площади треугольники – с равными основаниями и высотами.	Делают чертеж в тетради.	
Что мы получим, проведя параллельную основаниям линию, пересекающую оба треугольника равной высоты, мы при равных основаниях	получим и равные отрезки этой проведенной линии внутри треугольников – как следствие подобия "больших" и "малых"	

треугольников?	треугольников.	
Нужно доказать, что площади исходных треугольников равны. Какая существует формула для нахождения площади треугольника?	Площадь – это половина основания, умноженного на высоту.	$BH \perp AC$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$,
Верно, основания равны, высоты равны – что ещё нужно?	Дети сталкиваются с нехваткой знаний	
Ответы на все вопросы содержатся в теории пределов и интегральном исчислении. Но, когда **Бонавенту́ра Франче́ско Кавалье́ри** предложил свой принцип, никакого интегрального исчисления ещё не было. Кавальери был современником Галилея, а не Ньютона и Лейбница. Принцип звучал несколько непонятно: **Фигуры относятся друг к другу, как все их линии, взятые по любой регуле, а тела — как все их плоскости, взятые по любой регуле**. Регула в данном случае –		

линия или плоскость, параллельно которой проводятся секущие линии или плоскости. Что такое "все линии" или "все плоскости" – не уточняется. Но, понятно, речь шла не только о равенстве отрезков или плоскостных фигур, но и об их отношении. Т.е. речь часто шла о том, чтобы при расчёте площади или объёма заменить одну фигуру на другую – с равными или пропорциональнымиотрезками или площадями в сечениях. Такую фигуру, для которой площадь или объём известны. Рассмотрим пример: две треугольные пирамиды, имеющие одинаковые площади оснований и одинаковую высоту.		

Расположим пирамиды так, что основания окажутся в одной плоскости	Делают чертеж	 Черт 101.
Предлагаю вспомнить подобие треугольников. Что следует из подобия треугольников?	Из подобия треугольников внутри пирамиды следует, что, в случае равенства площадей оснований пирамид, площади сечений их плоскостью, параллельной основаниям, также будут равны.	
А что тогда следует из принципа Кавальери?	А из принципа Кавальери в этом случае следует, что и объёмы пирамид будут равны. Т.е. установлен факт равенства объёмов для пирамид, для которых мы пока не знаем формул вычисления объёма! **Объёмы**	

	пирамид (причём не только треугольных – любую пирамиду можно разбить на совокупность треугольных пирамид), **имеющих равные высоты** и **равные по площади основания**, на которые эти высоты опущены, **равны**. **А сейчас перейдём к вычислению объёма треугольной пирамиды**. Обычно её объём получают при помощи интегрирования, или разбиением на бесконечное количество элементов и суммированием – что тоже, по сути, интегрирование.	

Обратите внимание на три пирамиды, из которых состоит призма. Что общего имеют пирамиды 1 и 2?	Пирамиды 1 и 2 имеют общую вершину О и равные основания.	
Значит, по принципу Кавальери, они имеют равный объём (сечения, параллельные основанию, дадут треугольники, равные по площади, подобные треугольникам оснований).		
А что общего имеют пирамиды 1 и 3?	Пирамиды 1 и 3 тоже имеют равные объёмы – у них равные высоты и равные основания.	Дополняет чертеж

Что из этого следует?	Следовательно, объёмы всех трёх пирамид одинаковы	
Чему равны объемы этих пирамид?	Они равны 1/3 объёма призмы = 1/3*(площади треугольного основания)*высоту.	1/3 объёма призмы = 1/3*(площади треугольного основания)*высоту.
Следовательно, пирамида, с произвольным основанием разбивается на треугольные с общей высотой, и формула справедлива и для любой пирамиды.	Записывают вывод.